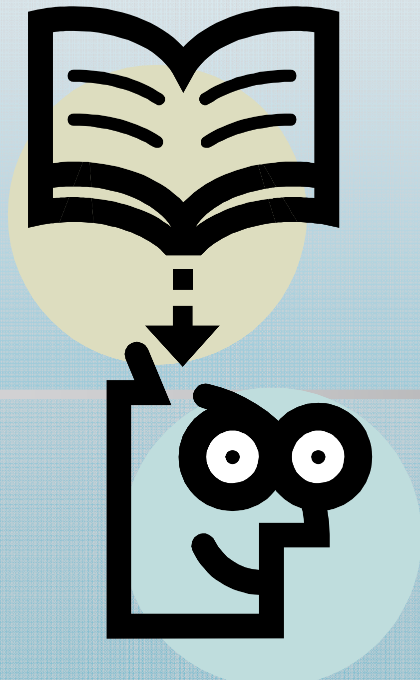
Aspecte științifice și metodice în predarea algebrei liniare



Ridicarea la putere a unei matrice

Prof. Elena – Dana Butunoiu

I. Metoda inducției matematice

Această metodă constă , de obicei, in următoarele etape :

- **se calculează A^2, A^3 , A^4 , ... până când intuim cât este A^n ;**
- **se demonstrează prin metoda inducției matematice propoziția**

P(n) : A^n = matricea fixată

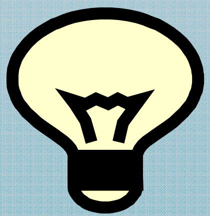
Exemple

1. Fie A $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Avem $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$



Vom demonstra, prin metoda inducției matematice, propoziția

P(n) : $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$**, n∈N***

Presupunând P(n) adevărată, avem

$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{n-1} & 0 & 2\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\cdot 2^{n-1} & 0 & 2\cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$**, adică P(n+1) este adevărată.**

Observație:

Pentru unele matrice de ordinul al doilea , metoda inducției matematice se aplică cu succes numai dacă elementele matricei se pot scrie cu ajutorul funcțiilor trigonometrice sin şi cos .

2. Pentru matricea $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$, putem scrie $A=2\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$, adică $A=2\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$.

Prin inducție demonstrăm că

$$A^n=2^n\begin{pmatrix}\cos n\cdot\frac{\pi}{6} & -\sin n\cdot\frac{\pi}{6}\\ \sin n\cdot\frac{\pi}{6} & \cos n\cdot\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$$

II. Metoda binomului lui NEWTON

Presupunem că matricea A se descompune ca sumă de două matrice X si Y, comutabile, adică XY=YX . Atunci avem:

$$A^n = (X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{n-k} Y^k$$

Exemple

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **. Remarcăm că A=I_3+B , unde** $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Apoi $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ **și $B^3= O_3$ de unde avem că $B^p= O_3$,** $\forall p\geq 3$.

Deoarece $I_3B=BI_3=B$, deducem că

$$A^n=(I_3+B)^n=I_3+C_n^1B+C_n^2B^2=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{(n-1)n}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & n & 2n+\dfrac{3(n-1)n}{2}\\ 0 & 1 & 3n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n & n\cdot\dfrac{4+3n-3}{2}\\ 0 & 1 & 3n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n & \dfrac{(3n+1)n}{2}\\ 0 & 1 & 3n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

III. Metoda şirurilor recurente

Fie A matrice pătratică de ordinul p.
Metoda şirurilor recurente constă in parcurgerea următoarelor etape :

- se scriu elementele matricilor A^n cu p^2 şiruri ;
- din $A^{n+1}=A^n \cdot A$ deducem relații de recurență pentru cele p^2 şiruri ;
- din relațiile de recurență găsim formulele generale ale termenilor şirurilor .

Exemple:

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ **. Presupunând** $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$**, avem**

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} aa_n+bb_n & ab_n+ba_n \\ ab_n+ba_n & aa_n+bb_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Rezultă $\begin{cases} a_{n+1}=aa_n+bb_n \\ b_{n+1}=ab_n+ba_n \end{cases}$, **unde avem** $\begin{cases} a_{n+1}+b_{n+1}=(a+b)^{n+1} \\ a_{n+1}-b_{n+1}=(a-b)^{n+1} \end{cases}$.

Prin urmare, adunând și scăzând aceste ultime două relații, obținem:

$$A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & \dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \\ \dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & \dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. **Atunci** $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}, A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}, A^4=\begin{pmatrix}1&4&6\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$

şi presupunem $A^n=\begin{pmatrix}1&n&a_n\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Calculând $A^{n+1}=A^n\cdot A$, obţinem $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1&n+1&n+a_n\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}$ **şi relaţia de recurenţă**

$$a_{n+1}=n+a_n, \forall n\geq 1$$

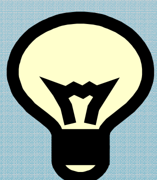
şi $a_1=0$, de unde deducem că

$$\cancel{a}_1 = 0$$
$$\cancel{a}_2 = 1 + \cancel{a}_1$$
$$\cancel{a}_3 = 2 + \cancel{a}_2$$
$$\vdots$$
$$\cancel{a}_{n-1} = n - 2 + \cancel{a}_{n-2}$$
$$a_n = n - 1 + \cancel{a}_{n-1}$$
$$\overline{a_n = 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)}$$
$$a_n = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$a^n = 1+2\ldots+(n-2)+(n-1)$, **adică** $a_n = \dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$

Aşadar obţinem

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



IV. Metoda ecuației caracteristice pentru matricea pătratică

Teorema Cayley – Hamilton (numită după numele matematicienilor Arthur Cayley și William Hamilton) afirmă că orice matrice pătratică pe un inel comutativ își satisface ecuația caracteristică:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$

unde A este o matrice pătratică de ordin n.

GENERALIZARE:

$$A^n - \left(Tr(A)\right) \cdot A^{n-1} + \ldots + \det(A) I_n = 0_n.$$

IV.1. Metoda ecuației caracteristice pentru matricea de ordinul 2

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2$ (C) . Acestei matrice i se asociază urma

Tr(A)=a+d şi determinantul det (A) = ad - bc. Aceste două numere determină ecuația caracteristică

$$\lambda^2-\left(Tr(A)\right)\cdot\lambda+\det(A)=0, cu\lambda\in \mathbb{C}$$

Dacă $\lambda_{1,2}$ sunt soluțiile acestei ecuații şi $x_n=\begin{cases} \dfrac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}, pentru\lambda_1\neq\lambda_2 \\ n\lambda_1^{n-1}, pentru\lambda_1=\lambda_2, \end{cases},$

atunci are loc următoarea teoremă.

Teorema . Fie A o matrice de ordinul 2.

1. Matricea A verifică $A^2-\left(Tr(A)\right)\cdot A+\left(\det(A)\right)\cdot I_2=O_2$
2. Matricea A^n verifică relația $A^n=x_n\cdot A-\left(\det(A)\right)x_{n-1}I_2, \forall n\in\mathrm{N}^*$

Consecință . Dacă A∊M_2 (C) şi det(A)=0, atunci pentru $\forall n\in\mathrm{N}^*$ avem

$$A^n=\left(Tr(A)\right)^{n-1}\cdot A.$$

Exemple

1. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$**. Atunci** $\mathrm{Tr(A)}=1+4=5,\ \det(\mathrm{A})=4+2=6$ **, ecuația caracteristică**

$\lambda^2-5\lambda+6=0$ **are solutiile** $\lambda_1=2$ **şi** $\lambda_2=3.$

$x_n=\dfrac{2^n-3^n}{2-3}=3^n-2^n.$ **Cu teorema anterioară , avem**

$$A^n=\left(3^n-2^n\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}-6\cdot\left(3^{n-1}-2^{n-1}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Efectuând produsele, găsim :

$A^n=\begin{pmatrix}3^n-2^n & 2\cdot3^n-2^{n+1}\\ 2^n-3^n & 4\cdot3^n-2^{n+2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot2^n-2\cdot3^n & 0\\ 0 & 3\cdot2^n-2\cdot3^n\end{pmatrix}$, **de unde** $A^n=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n & 2\cdot3^n-2^{n+1}\\ 2^n-3^n & 2\cdot3^n-2^n\end{pmatrix}.$

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ **Ecuația caracteristică este** $\lambda^2-4\lambda+4=0$

ce are soluții egale $\lambda_1=\lambda_2=2.$ **Cum** $\det(\mathrm{A})=4, x_n=n\cdot 2^{n-1},$ **avem**

$$A^n=n\cdot 2^{n-1}\begin{pmatrix}5 & 3\\ -3 & -1\end{pmatrix}-4\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Efectuând produsele, deducem $A^n=\begin{pmatrix}5n\cdot 2^{n-1}-(n-1)2^n & 3n\cdot 2^{n-1}\\ -3n\cdot 2^{n-1} & -n\cdot 2^{n-1}-(n-1)2^n\end{pmatrix}.$

3. Pentru matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix},$ **avem** $\mathrm{Tr(A)}=5 \text{ si } \det(\mathrm{A})=6-6=0.$

Utilizând consecința teoremei precedente , obținem

$$A^n=5^{n-1}\cdot A=5^{n-1}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}.$$

Bibliografie

1. Matematică M2, Marius Burtea, Georgeta Burtea, Editura Books Unlimited Publishing, Bucureşti 2007;

2. Algebra şi analiza matematică pentru admiterea în facultate, C. Ionescu−Ţiu, L. Pîrşan, Editura Albatros, Bucureşti 1994 ;