LICEUL TEHNOLOGIC „ OVID CALEDONIU"
Str. Matei Basarab nr. 11, Tecuci
Tel: 0236811344, Fax:0236811322
E-mail: ovidcaledoniu@yahoo.com
http://www.gsoc.ro

Probleme rezolvate din Gazeta Matematica Seria B

Prof. Movileanu Sergiu

1) Problema 27335

Să se determine numerele reale x,y,z > $\frac{3}{2}$ cu proprietate că $\frac{(x+1)^2}{y+z-1} + \frac{(y+2)^2}{z+x-2} + \frac{(z+3)^2}{x+y-3} = 18$.

Soluție:

Demonstrăm că $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$, $\forall$ a, b, x, y > 0

Observăm că egalitatea are loc pentru $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

$\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)(a + b) \geq x^2 + 2xy + y^2$

$x^2 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{a}{b}y^2 + y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$

$\frac{b}{a}x^2 + \frac{a}{b}y^2 \geq 2xy$ (inegalitatea mediilor)

Analog, se demonstrează că $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ **(1)**

Cum, y + z – 1 > 0, z + x – 2 > 0 si x + y – 3 > 0 =>

$$\frac{(x+1)^2}{y+z-1} + \frac{(y+2)^2}{z+x-2} + \frac{(z+3)^2}{x+y-3} \geq \frac{[(x+1)+(y+2)+(z+3)]^2}{[(y+z-1)+(z+x-2)+(x+y-3)]}$$

$$\frac{(x+1)^2}{y+z-1} + \frac{(y+2)^2}{z+x-2} + \frac{(z+3)^2}{x+y-3} \geq \frac{(x+y+z+6)^2}{2(x+y+z-3)}$$

Notăm x + y + z = t => $18 \geq \frac{(t+6)^2}{2(t-3)}$ **(2)**

Demonstrăm că $\frac{(t+6)^2}{2(t-3)} \geq 18$ **(3)**

$\frac{(t+6)^2}{2(t-3)} \geq 18 \Leftrightarrow t^2 + 12t + 36 \geq 36(\text{ t-3 }) \Leftrightarrow t^2 - 24t + 144 \geq 0 \Leftrightarrow (t-12)^2 \geq 0$ (A)

Din relațiile (2) și (3) => $\frac{(t+6)^2}{2(t-3)} = 18$ => $(t-12)^2 = 0$ => t = 12 => x + y + z = 12

Așadar inegalitatea (1) devine egalitate => $\frac{x+1}{y+z-1} = \frac{y+2}{z+x-2} = \frac{z+3}{x+y-3} = \frac{t+6}{2(t-3)} = 1$

Deci, x = 5, y = 4, z = 3.

2) *Problema 27336*

Fie numerele $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in (0, +\infty)$ cu proprietatea că

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \frac{1}{1+x_4} + \frac{1}{1+x_5} + \frac{1}{1+x_6} = 5$$

Să se arate că $\frac{1}{1+25x_1} + \frac{1}{1+25x_2} + \frac{1}{1+25x_3} + \frac{1}{1+25x_4} + \frac{1}{1+25x_5} + \frac{1}{1+25x_6} \geq 1$.

<u>Soluție:</u>

Vom demonstra că $\frac{1}{1+25a} \geq \frac{1}{1+a} - \frac{2}{3}$, $\forall$ a > 0

$\frac{1}{1+25a} \geq \frac{3-2-2a}{3(1+a)} \Leftrightarrow \frac{1}{1+25a} \geq \frac{1-2a}{3(1+a)}$

$3(1+a) \geq (1+25a)(1-2a) \Leftrightarrow 3 + 3a \geq 1 + 23a - 50a^2$

$50a^2 - 20a + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 25a^2 - 10a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (5a-1)^2 \geq 0$ (A)

Așadar, $\frac{1}{1+25a} \geq \frac{1}{1+a} - \frac{2}{3}$, $\forall$ a > 0

$\sum_{a=1}^{6} \frac{1}{1+25x_a} \geq \sum_{a=1}^{6}\left(\frac{1}{1+x_a} - \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \sum_{a=1}^{6} \frac{1}{1+25x_a} \geq 5 - 6 \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sum_{a=1}^{6} \frac{1}{1+25x_a} \geq 1$

3) Problema 27341

Să se determine x și y astfel încât $\boldsymbol{log_2(x+y)}$ + 4 = $\mathbf{2^x}$ + $\mathbf{2^y}$ și $\boldsymbol{\frac{x^2+y^2}{4} + \frac{xy}{x+y} = 1}$.

<u>Soluție:</u>

Vom demonstra că x + y = 2

Presupunem că x + y > 2

Deci, $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{2}$ |· $\frac{1}{2}$ => $\frac{1}{2(x+y)} < \frac{1}{4}$ |· (x^2+y^2) => $\frac{x^2+y^2}{4} > \frac{x^2+y^2}{2(x+y)}$ | + $\frac{xy}{x+y}$

$\frac{x^2+y^2}{4} + \frac{xy}{x+y} > \frac{x^2+y^2}{2(x+y)} + \frac{xy}{x+y}$ => 1 > $\frac{(x+y)^2}{2(x+y)}$ =>1 > $\frac{x+y}{2}$ > 1 (F)

Analog, presupunem că x + y < 2

Deci, $\frac{1}{x+y} > \frac{1}{2}$ |· $\frac{x^2+y^2}{2}$ => $\frac{x^2+y^2}{2(x+y)} > \frac{x^2+y^2}{4}$ |+ $\frac{xy}{x+y}$ => $\frac{(x+y)^2}{2(x+y)} > \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{xy}{x+y}$ => 1 > $\frac{x+y}{2}$ > 1(F)

Așadar, obținem că x + y = 2 => $log_2(x+y)$ + 4 = 2^x + 2^y=>1 + 4 = 2^x + 2^y =>

5 = 2^x + 2^y, dar y = 2 – x => 5 = 2^x + 2^{2-x} => 5 = $2^x + \frac{4}{2^x}$

Notăm $2^x = t > 0$, obținem 5 = t + $\frac{4}{t}$ => $t^2 - 5t + 4 = 0$, $\Delta = 9$;

Pentru $t_1 = 1$ => $x_1 = 0$, $y_1 = 2$

Pentru $t_2 = 4$ => $x_2 = 2$, $y_2 = 0$

LICEUL TEHNOLOGIC „ OVID CALEDONIU”
Str. Matei Basarab nr. 11, Tecuci
Tel: 0236811344, Fax:0236811322
E-mail: ovidcaledoniu@yahoo.com
http://www.gsoc.ro

4) Problema 27399

Să se rezolve ecuația $\boldsymbol{\log_5 x \cdot \log_4(27-x) = 1}$

Soluție:

Observăm că ecuația are soluții pentru x $\in$ (0; 27);

$\log_5 x \cdot \log_4(27-x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log_5 x \cdot \log_2(27-x) = 1 | \cdot 2 \Rightarrow \log_5 x \cdot \log_2(27-x) = 2$

$\Rightarrow \log_5 x \cdot \log_2(27-x) = 2 \cdot 1 \Rightarrow \log_5 x \cdot \log_2(27-x) = \log_5 25 \cdot \log_2 2$

$\Rightarrow$ x = 25 $\in$ (0; 27).