Examenul naţional de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespuzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1	$(x-y+2)-(x+y)i=4$	**2p**
	$\begin{cases} x-y+2=4 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$	**3p**
2	Vârful parabolei asociate funcţiei f este $V\left(m,2-m^2\right)$.	**2p**
	V se găseşte pe dreapta $y=x$ dacă $2-m^2=m \Leftrightarrow m\in\{-2,1\}$	**3p**
3	$\log_2(x+1)=\log_2 2+\log_2(x-2)\Rightarrow$ $\Rightarrow \log_2(x+1)=\log_2 2(x-2)$	**2p**
	$x+1=2(x-2)$, deci $x=3$, care convine	**3p**
4	Există $4!$ permutări care au pe prima poziţie numărul 2 şi $4!$ permutări care au pe prima poziţie numărul 4	**3p**
	$\Rightarrow 4!\cdot 2$ permutări cu proprietatea din enunţ	**2p**
5	$m_{AB}=-1-a$ (panta dreptei AB) şi $m_{CD}=2$ (panta dreptei CD)	**3p**
	$AB \parallel CD \Leftrightarrow m_{AB}=m_{CD} \Leftrightarrow a=-3$	**2p**
6	Notăm $\sin x=t$ cu restricţia $0<t\le 1$. Din $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ şi $\sin x=t$, rezultă $\cos^2 x=1-t^2$. Ecuaţia devine $1-t^2+2t=\frac{7}{4}\Rightarrow 4t^2-8t+3=0$, cu soluţiile $t_1=\frac{1}{2}$ şi $t_2=\frac{3}{2}$.	**2p**
	Cum $t\in(0,1]$, rezultă $t=\frac{1}{2}$. Deci, $\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$.	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1a)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m+2 & m+2 & m+2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=(m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=(m+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & m-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(m+2)(m-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(m+2)(m-1)^2$	**2p**
b)	Dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$, avem $\det(A(m))\neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat.	**2p**
	$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$, unde $\Delta=\det(A(m))$. $\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=0$. Soluţia sistemului este tripletul $(0,0,1)$.	**3p**
c)	Pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$, soluția $(0,0,1)$ a sistemului nu verifică relația $x_0^2+y_0^2=z_0^2$. Dacă $m=-2$, sistemul devine $\begin{cases}-2x+y+z=1\\ x-2y+z=1\\ x+y-2z=-2\end{cases}$. Minorul principal este $d_p=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}$, x şi y sunt necunoscute principale, z este necunoscută secundară, primele două ecuaţii ale sistemului sunt principale iar a treia ecuaţie este secundară. Există un singur minor caracteristic şi anume $d_c=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0$. Mulţimea soluţiilor în acest caz este $\{(\alpha-1,\alpha-1,\alpha)/\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ Verificăm dacă există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $(\alpha-1)^2+(\alpha-1)^2=\alpha^2$. Obţinem $\alpha\in\left\{2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right\}$. Dacă $m=-2$, exact două dintre soluţiile sistemului verifică relaţia $x_0^2+y_0^2=z_0^2$. Dacă $m=1$, sistemul este compatibil dublu nedeterminat şi mulţimea soluţiilor sistemului este $\{(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)/\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. Verificăm dacă există $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $(1-\alpha-\beta)^2+\alpha^2=\beta^2$ sau, echivalent, $\alpha^2-2\alpha+1=2\beta(1-\alpha)$. Pentru fiecare $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ există $\beta=\frac{1-\alpha}{2}$ astfel încât tripletele $(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$ verifică relaţia dată. Prin urmare, în acest caz, există o infinitate de triplete care verifică relaţia.	**3p**
	În concluzie, exact două dintre soluţiile sistemului verifică relaţia dată doar dacă $m=-2$.	**2p**

2a)	$x*y=9xy-3x-3y+1+\frac{1}{3}$	2p
	$=9x\left(y-\frac{1}{3}\right)-3\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}=9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.	3p
b)	Demonstrăm că, pentru oricare $a\in\left(\frac{4}{9},+\infty\right)$, şi oricare $x,y\in M$ are loc $x*y\in M$. Fie $x,y\in M$. Atunci $x-\frac{1}{3}>a-\frac{1}{3}$ şi $y-\frac{1}{3}>a-\frac{1}{3}$, şi cum $a-\frac{1}{3}\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$, are loc $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)>\left(a-\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow 9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}>9\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\Leftrightarrow x*y>9\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$.	2p
	Inegalitatea $9\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}>a$ este echivalentă cu $9\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{4}{3}\right)>0$, aceasta fiind, pentru $a\in\left(\frac{4}{9},+\infty\right)$, o relație adevărată. Prin urmare, $x*y>a$, deci $x*y\in M$, oricare ar fi $x,y\in M$ şi oricare ar fi $a\in\left(\frac{4}{9},+\infty\right)$.	3p
c)	Elementul neutru pentru legea de compoziție "$*$" este $e=\frac{4}{9}$. Presunem că există numere întregi x al căror simetric x' în raport cu legea "$*$" să fie număr întreg. Atunci: $x*x'=\frac{4}{9}\Leftrightarrow 9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x'-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}\Leftrightarrow(3x-1)(3x'-1)=\frac{1}{9}\Leftrightarrow(9x-3)(9x'-3)=1.$	3p
	Cum $9x-3,\ 9x'-3\in\mathbb{Z}$, ultima egalitate poate avea loc doar în situațiile: $\begin{cases}9x-3=1\\9x'-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{9}\\x'=\frac{4}{9}\end{cases}$ sau $\begin{cases}9x-3=-1\\9x'-3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{9}\\x'=\frac{2}{9}\end{cases}$. Niciuna din situaţii nu convine, x şi x' fiind simultan numere întregi deci presupunerea făcută este falsă. În concluzie, nu există niciun număr întreg x al cărui simetric x' în raport cu legea "$*$" să fie număr întreg.	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1a)	$f'(x)=\frac{(2x+6)e^x-\left(x^2+6x+9\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$	2p
	$=\frac{e^x\left(-x^2-4x-3\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-x^2-4x-3}{e^x}=\frac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	3p
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ sau $x=-1$	2p
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,-3]\Rightarrow f$ descrescătoare pe $(-\infty,-3]$ $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[-3,-1]\Rightarrow f$ crescătoare pe $[-3,-1]$ $f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in[-1,\infty)\Rightarrow f$ descrescătoare pe $[-1,\infty)$	3p

c)	f crescătoare pe $[-3,-1]$, descrescătoare pe $[-1,\infty)$ și $f(-1)=4e$, deci $f(x)\le 4e$, oricare ar fi $x\in[-3,\infty)$.	2p
	$\frac{(x+3)^2}{e^x}\le 4e \Rightarrow (x+3)^2\le 4\cdot e^{x+1}\Rightarrow x+3\le 2\cdot e^{\frac{x+1}{2}}$, pentru orice $x\in[-3,\infty)$. Analog, $y+3\le 2\cdot e^{\frac{y+1}{2}}$, pentru orice $y\in[-3,\infty)$, deci: $(x+3)(y+3)\le 4\cdot e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,\infty)$.	3p
2a)	$I_1=\int_2^3(x-2)(3-x)\,dx=\int_2^3(-x^2+5x-6)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-6x\right)\Big\vert_2^3=$	3p
	$=\left(-9+\frac{45}{2}-18\right)-\left(-\frac{8}{3}+10-12\right)=-\frac{9}{2}-\frac{-14}{3}=\frac{1}{6}$	2p
b)	$I_n=\int_2^3(-x^2+5x-6)^n\,dx=\int_2^3\left[\frac{1}{4}-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\right]^n dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-y^2\right)^n dy$	2p
	$I_n=\left(\frac{1}{4}-y^2\right)^n\cdot y\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-y^2\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}-y^2-\frac{1}{4}\right)dy$ $I_n=-2n\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-y^2\right)^n dy-\frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-y^2\right)^{n-1}dy\right]$ $I_n=-2nI_n+\frac{n}{2}I_{n-1}\Rightarrow(4n+2)I_n=nI_{n-1},n\ge 2$	3p
c)	$0\le -x^2+5x-6\le\frac{1}{4}$ pentru orice $x\in[2,3]$.	2p
	$0\le(-x^2+5x-6)^n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ pentru orice $x\in[2,3]$, deci $0\le I_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ de unde obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.	3p

Prof. Alina Dumitrașcu
Liceul Teoretic „Dunarea”, Galați