Examenul național de bacalaureat 2023
Simulare la nivel județean
Matematică *M_mate-info*
Proba E. c)
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_3 4 \le \frac{4}{3}$	**2p**
	$\log_3 4^3 \le \log_3 3^4$	**2p**
	$64 \le 81$	**1p**
2.	$x_1 + x_2 = m - 2$, $x_1x_2 = m - 3$	**2p**
	$3m^2 - 28m + 60 = 0 \implies m_1 = 6, m_2 = \frac{10}{3}$	**2p**
	$m \in \mathbf{Z}$, deci $m = 6$ este soluție	**1p**
3.	Se notează $4^{\sqrt{x-1}} = t$, $x \ge 1$, $t > 0$	**1p**
	$t + \frac{4}{t} = 5 \iff t^2 - 5t + 4 = 0 \implies t_1 = 1 > 0,\ t_2 = 4 > 0$	**2p**
	$x_1 = 1,\ x_2 = 2$ care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Numărul funcţiilor din mulţimea A este 4^4, deci sunt 256 cazuri posibile	**2p**
	Numărul funcţiilor bijective din mulţimea A este 4!, deci sunt 24 cazuri favorabile	**2p**
	$P = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{3}{32}$	**1p**
5.	$P(3,-2)$ este mijlocul segmentului MN	**1p**
	$m_{MN} = -\frac{3}{2}$, $m = \frac{2}{3}$, unde m este panta mediatoarei	**2p**
	$y + 2 = \frac{2}{3}(x-3) \iff 2x - 3y - 12 = 0$ este ecuaţia mediatoarei	**2p**
6.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	**2p**
	$x \in (0,2\pi) \implies x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3};\ 2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$	**1p**
	$x + \frac{\pi}{3} \in \left\{\frac{5\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}\right\} \implies x \in \left\{\frac{\pi}{2};\ \frac{11\pi}{6}\right\}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1-x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ -x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, $A\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $2A\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**3p**
	$A(x) + A(1-x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies A(x) + A(1-x) = 2A\left(\frac{1}{2}\right),\ (\forall)x \in \mathbf{R}$	**2p**
b)	$\det(A(x)) = (x-1)^3 - 1$	**1p**
	$(x-1)^3 - 1 = 2x - 3 \iff (x-1)^3 - 2(x-1) = 0 \iff (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$	**2p**
	$x_1 = 1,\ x_2 = 1 - \sqrt{2},\ x_3 = 1 + \sqrt{2}$ sunt valorile reale care verifică relaţia dată	**2p**

c)	$\mathrm{Tr}\big(A(\mathrm{m})\cdot A(\mathrm{n})\big)=a_{11}+a_{22}+a_{33}=3+3(m-1)(n-1)$ $(m-1)(n-1)=5$ $m,n\in\mathbb{Z},\ \ m>n$, deci $(m,n)\in\{(0,-4),(6,2)\}$	**2p** **1p** **2p**
2.a)	$x*y=5xy-\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}y+\frac{5}{2}+\frac{2}{4}=5\left(xy-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ $=5\left[x\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}=5\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$e\in\mathbf{R}$ este element neutru dacă $x*e=e*x=x,(\forall)x\in\mathbf{R}$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(e-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=5\left(e-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=x,(\forall)x\in\mathbf{R}\ \Rightarrow e=\frac{7}{10}\in\mathbf{R}$ x' este simetricul lui 1 dacă $1*x'=x'*1=\mathrm{e}\ \Leftrightarrow\ 5x'-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}x'+\frac{7}{4}=\frac{7}{10}\ \Leftrightarrow\ x'=\frac{29}{50}$	**3p** **2p**
c)	$5\left(\log_2\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\le\frac{41}{2}\ \Leftrightarrow\ \left(\log_2\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right)^2\le 4$ $\left\lvert\log_2\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right\rvert\le 2\ \Leftrightarrow\ -3\le\log_2\mathrm{n}^2\le 5\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{8}\le\mathrm{n}^2\le 32$ Deoarece $\mathrm{n}\in\mathbf{N}^*$, se obţine $\mathrm{n}\in\{1,2,3,4,5\}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\mathrm{f}'(\mathrm{x})=e^{\frac{1}{x}}+(x-1)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=$ $=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{x-1}{x^2}\right)=\frac{x^2-x+1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$, $\forall x>0$	**2p** **3p**
b)	$A\left(\frac{2}{3};0\right)$ aparţine tangentei $\Rightarrow\ 0-y_0=f'(x_0)(\frac{2}{3}-\mathrm{x}_0)\ \Leftrightarrow\ -(\mathrm{x}_0-1)=\frac{\mathrm{x}_0^2-\mathrm{x}_0+1}{\mathrm{x}_0^2}(\frac{2}{3}-\mathrm{x}_0)$ $2x_0^2-5x_0+2=0\ \Rightarrow\ \mathrm{x}_0\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$, dar x_0 este pozitiv şi subunitar $\Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$ Ecuaţia tangentei este $y=3\mathrm{e}^2x-2\mathrm{e}^2$	**2p** **2p** **1p**
c)	$f'(x)>0,\forall x>0\Rightarrow$ funcţia f este strict crescătoare pe $(0;+\infty)$ $\Rightarrow$ funcţia f este injectivă pe $(0;+\infty)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\mathrm{f(x)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f(x)}=+\infty$, f este continuă pe $(0;+\infty)$ $\Rightarrow$ Im $f=\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ funcţia f este surjectivă pe $(0;+\infty)$ Deoarece funcţia f este injectivă şi surjectivă pe $(0;+\infty)$, rezultă că funcţia f este bijectivă pe $(0;+\infty)$, de unde rezultă că ecuaţia $f(\mathrm{x})=\mathrm{m}$ are soluţie unică pe $(0;+\infty)$, $\forall m\in\mathbf{R}$.	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\int e^{\frac{f(x)}{x}}\mathrm{dx}=\int e^{ln\,(x^2+4)}\mathrm{dx}=\int(x^2+4)\mathrm{dx}=$ $=\frac{x^3}{3}+4x+\mathrm{C}$	**2p** **3p**
b)	$\int f(x)\mathrm{dx}=\frac{x^2}{2}\ln(x^2+4)-\int\frac{x^3}{x^2+4}\mathrm{dx}=$ $=\frac{x^2}{2}\ln(\mathrm{x}^2+4)-\int\frac{x^3+4x-4x}{x^2+4}\mathrm{dx}=\left(\frac{x^2}{2}+2\right)\ln(x^2+4)-\frac{x^2}{2}+\mathrm{C}$ $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}+2\right)ln(x^2+4)-\frac{x^2}{2}+\mathrm{c}$, $F(-1)=\frac{5}{2}ln5-\frac{1}{2}+\mathrm{c}$ şi $F(-1)=\frac{5}{2}ln5\ \Rightarrow$ $\mathrm{c}=\frac{1}{2}$. Primitiva căutată este $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}+2\right)ln(x^2+4)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$	**1p** **2p** **2p**
c)	$F''(x)=f'(x)=ln(x^2+4)+\frac{2x^2}{x^2+4}$ $x^2\ge 0,\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow\frac{2x^2}{x^2+4}\ge 0,\forall x\in\ \mathbf{R}$; $x^2+4\ge 4>1\Rightarrow ln(x^2+4)>0,\forall x\in\mathbf{R}\ \Rightarrow$ $F''(\mathrm{x})>0,\forall x\in\mathbf{R}\ \Longrightarrow\ F$ este convexă pe $\mathbf{R}$	**2p** **2p** **1p**