

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $(1 + \sqrt{3}) \cdot \{8 + \sqrt{3}\}$ este număr natural, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a .
- 5p 2. Se consideră familia de funcții $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 - 2(m+1)x + m - 2$, unde $m \in \mathbb{R}^*$. Arătați că vârfurile parabolilor asociate acestor funcții se găsesc pe o dreaptă.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{10}{3}$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare o funcție $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, aceasta să fie injectivă?
- 5p 5. În triunghiul ABC se consideră punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{MC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$. Arătați că punctele M, N și P sunt coliniare.
- 5p 6. Arătați că, dacă într-un triunghi ABC are loc relația $\cos B + \cos C = \sin A$, atunci triunghiul este dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - az = -2, a, b \in \mathbb{R}. \\ 3x - y + 3z = b \end{cases}$$
- 5p a) Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul admite soluția $(-1; 1; 2)$.
- 5p b) Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul este incompatibil.
- 5p c) Pentru $a = -2$ și $b = -3$ găsiți soluțiile $(x_0; y_0; z_0)$ pentru care $x_0^2 - y_0^2 + z_0^2 = 5$.
2. Pentru x și y din mulțimea $G = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ se definește operația $x \circ y = \frac{x + y}{1 + 4xy}$.
- 5p a) Să se arate că dacă $x, y \in G$, atunci $x \circ y \in G$.
- 5p b) Știind că (G, \circ) este grup abelian, demonstrați că funcția $f : G \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1 - 2x}{1 + 2x}$ este izomorfism de la grupul (G, \circ) la grupul (\mathbb{R}_+^*, \cdot)

5p c) Calculați $\frac{1}{4} \circ \frac{1}{6} \circ \frac{1}{8} \circ \dots \circ \frac{1}{20}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Fie funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + \ln x}{x}$.

5p a) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f .

5p b) Aflați coordonatele punctului în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu asimptota oblică.

5p c) Arătați că $f(x) \leq -2x + \frac{1+3e}{e}$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{9x^2 + 6x + 2} dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.

*Test propus de profesor Drujescu Marius,
Colegiul Național „Costache Negri” Galați*