Examenul naţional de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI CORECTARE

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- ***Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.***
- ***Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.***
- ***Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.***

SUBIECTUL I (30 puncte)

1.	$\left\{8+\sqrt{3}\right\}=\left\{\sqrt{3}\right\}$ $1<\sqrt{3}<2 \Rightarrow \left[\sqrt{3}\right]=1 \Rightarrow \left\{\sqrt{3}\right\}=\sqrt{3}-1$ $\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=2\in\mathbb{N}$	**1p** **2p** **2p**
2.	Vârful V_m al parabolei asociate funcției f_m are coordonatele $x_V=\frac{m+1}{m}$ și $y_V=-\frac{4m+1}{m}$ Eliminând pe m între cele două relații, obținem $x_V+y_v+3=0$ Deci vârfurile parabolelor se află pe dreapta de ecuație $x+y+3=0$	**2p** **2p** **1p**
3.	Condiții de existență: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1\end{cases} \Rightarrow x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ $\log_x 2+\log_2 x=\frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x}+\log_2 x=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3\log_2^2 x-10\log_2 x+3=0$ Notăm: $\log_2 x=t \Rightarrow 3t^2-10t+3=0 \Rightarrow t_1=3$ sau $t_2=\frac{1}{3}$ Obținem $x_1=8$ care convine; $x_2=\sqrt[3]{2}$ care convine	**1p** **2p** **1p** **1p**
4.	Numărul funcțiilor $f:\{0,1,2\}\to\{1,2,3,4,5,6\}$ este egal cu 6^3, deci sunt 216 de cazuri posibile. Numărul funcțiilor injective este egal cu $A_6^3=\frac{6!}{3!}$, deci sunt 120 de cazuri favorabile $p=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$	**2p** **2p** **1p**
5.	În ΔABC avem $N\in(AC)$, $P\in(AB)$, $B\in(MC)$ și $\frac{AN}{NC}=\frac{1}{3}$, $\frac{AP}{PB}=1$, $\frac{MB}{MC}=\frac{1}{3}$ Cum $\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BP}{PA}=1$ rezultă, conform reciprocei teoremei lui Menelau, că punctele M, N și P sunt coliniare.	**3p** **2p**
6.	$\cos B+\cos C=\sin A \Leftrightarrow 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\frac{\pi-A}{2}=\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{A}{2}$ Rezultă că $\frac{B-C}{2}=\frac{A}{2}$ sau $\frac{C-B}{2}=\frac{A}{2} \Rightarrow B=\frac{\pi}{2}$ sau $C=\frac{\pi}{2}$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1.	**a)**	Înlocuim în sistem pe x cu -1, pe y cu 1 și pe z cu 2 : $\begin{cases} -1-2\cdot 1+2=-1 \\ 2\cdot(-1)+1-a\cdot 2=-2 \\ 3\cdot(-1)-1+3\cdot 2=b \end{cases}$	**2p**
		Obținem $a=\frac{1}{2}$ și $b=2$	**3p**
	b)	Determinantul matricei sistemului este $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=10+5a$	**1p**
		Dacă $\det(A)\neq 0$ atunci sistemul este compatibil determinat, deci $\det(A)=0 \Leftrightarrow a=-2$	**1p**
		Considerăm minorul principal $\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5$, deci $\Delta_{car}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & b \end{vmatrix}=5b+15$	**2p**
		Sistemul este incompatibil $\Leftrightarrow \Delta_{car}\neq 0 \Leftrightarrow b\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$	**1p**
	c)	Dacă $a=-2$ și $b=-3$ atunci, conform punctului (b), sistemul este compatibil nedeterminat	**1p**
		Mulțimea soluțiilor sistemului este $\{(-1-\lambda;0;\lambda) \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$	**2p**
		Soluțiile căutate se obțin pentru acele valori ale parametrului λ care verifică egalitatea $(-1-\lambda)^2-0^2+\lambda^2=5 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-2=0$, adică $\lambda\in\{-2;1\}$	**1p**
		Deci $(x,y,z)\in\{(1;0;-2),(-2;0;1)\}$	**1p**
2.	**a)**	Fie $x,y\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow \lvert x\rvert<\frac{1}{2}$ și $\lvert y\rvert<\frac{1}{2}\Leftrightarrow \lvert xy\rvert=\lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert<\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4\cdot\lvert xy\rvert<1$	**1p**
		$\Leftrightarrow -1<4xy<1 \mid +1 \Leftrightarrow 0<1+4xy<2$	**1p**
		$-\frac{1}{2}<\frac{x+y}{1+4xy}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow -1-4xy<2x+2y<1+4xy \mid -2x-2y$	**1p**
		$\Leftrightarrow -4\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)<0$ și $0<4\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)$.	**1p**
		Ambele inegalități sunt adevărate deoarece $x,y\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	**1p**
	b)	$f(x\circ y)=\frac{1-2x\circ y}{1+2x\circ y}=\frac{1+4xy-2x-2y}{1+4xy+2x+2y}=\frac{(1-2x)\cdot(1-2y)}{(1+2x)\cdot(1+2y)}=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in G$ $\Rightarrow f$ este morfism de grupuri *(1)*	**2p**
		f este derivabilă și $f'(x)=\frac{-4}{(1+2x)^2}<0,\forall x\in G\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $G\Rightarrow f$ este injectivă *(2)*	**1p**
		f este continua și $\lim\limits_{x\searrow -\frac{1}{2}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow \frac{1}{2}} f(x)=-\infty\Rightarrow \operatorname{Im} f=\mathbb{R}\Rightarrow$ f este surjectivă *(3)*	**1p**
		Din *(2)* și *(3)* rezultă că funcția f este bijectivă. În concluzie, funcția f este izomorfism.	**1p**
	c)	Prin inducție matematică arătăm că $f(x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n)=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n),\forall x_i\in G,i=\overline{1,n}$ și $\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2$	**2p**

		Rezultă că $f\left(\frac{1}{4}\circ\frac{1}{6}\circ\ldots\circ\frac{1}{20}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{55}$ *(4)*	**1p**
		Cum funcția f este bijectivă rezultă că este inversabilă, cu $f^{-1}:(0;+\infty)\to\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $f^{-1}(x)=\frac{1-x}{2(1+x)}$	**1p**
		Relația *(4)* este echivalentă cu $\frac{1}{4}\circ\frac{1}{6}\circ\frac{1}{8}\circ\ldots\circ\frac{1}{20}=f^{-1}\left(\frac{1}{55}\right)=\frac{27}{56}$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1.	**a)**	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-2\in\mathbb{R}^*$	**2p**
		$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)+2x\right]=3$	**2p**
		Dreapta de ecuație $y=-2x+3$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a graficului funcției f	**1p**
	b)	Fie punctul $A(a;f(a))$ în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu asimptota oblică, atunci $f'(a)=-2$.	**1p**
		$f'(x)=\frac{-2x^2+1-\ln x}{x^2}$	**2p**
		$f'(a)=-2\Leftrightarrow a=e\Rightarrow A\left(e;\frac{-2e^2+3e+1}{e}\right)$	**2p**
	c)	$f(x)\le -2x+\frac{1+3e}{e},\ \forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e},\forall x\in(0;+\infty)$	**1p**
		Considerăm funcția $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R},g(x)=\frac{\ln x}{x}$; g este derivabilă și $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$	**1p**
		$g'(x)=0\Leftrightarrow x=e$	**1p**
		$g'(x)>0,\forall x\in(0;e)\Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0;e)$ și $g'(x)<0,\forall x\in(e;+\infty)$ $\Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $(e;+\infty)$	**1p**
		Rezultă că $x=e$ este punct de maxim al funcției $g\Leftrightarrow g(x)\le g(e),\forall x\in(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e},\forall x\in(0;+\infty)$	**1p**
2.	**a)**	$I_1=\int_0^1\frac{x}{9x^2+6x+2}dx=\frac{1}{18}\int_0^1\frac{18x+6-6}{9x^2+6x+2}dx=\frac{1}{18}\int_0^1\frac{18x+6}{9x^2+6x+2}dx-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{(3x+1)^2+1}dx$	**2p**
		$I_1=\frac{1}{18}\ln\left(9x^2+6x+2\right)\Big\vert_0^1-\frac{1}{9}arctg(3x+1)\Big\vert_0^1$	**2p**
		$I_1=\frac{1}{18}\ln\frac{17}{2}-\frac{1}{9}\left(arctg4-\frac{\pi}{4}\right)$	**1p**
	b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{9x^2+6x+2}dx,\forall n\in\mathbb{N}^*$	**1p**
		Cum $x^n(x-1)\le 0,\forall x\in[0;1],\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $9x^2+6x+2=(3x+1)^2+1>0,\ \forall x\in[0;1]$	**2p**
		$\Rightarrow I_{n+1}-I_n\le 0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător.	**2p**

	c)	$9I_{n+2}+6I_{n+1}+2I_n=\int_0^1\frac{x^n\left(9x^2+6x+2\right)}{9x^2+6x+2}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$	**2p**
		Cum șirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este descrescător rezzultă că $9I_{n+2}+6I_{n+1}+2I_n\leq 17I_n,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow 17I_n\geq\frac{1}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $9I_{n+2}+6I_{n+1}+2I_n\geq 17I_{n+2},\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow 17I_{n+2}\leq\frac{1}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow 17I_n\leq\frac{1}{n-1},\forall n\geq 3$	**1p**
		Rezultă că $\frac{1}{17(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{17(n-1)},\forall n\geq 3$. Înmulțim această relație cu n și,	**1p**
		conform criteriului cleștelui, obținem $\lim_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{17}$.	**1p**

Test propus de profesor Drujescu Marius,

Colegiul Național „Costache Negri” Galați