Examenul naţional de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ȘI CORECTARE

Testul 1

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- ***Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.***
- ***Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.***
- ***Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.***

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	$\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}-\sqrt{3}+1\right)^2\cdot\frac{6}{2\sqrt{2}+2}-3\sqrt{2}=$ $(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)^2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}+1}-3\sqrt{2}=$ $\left(1+\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}+1}-3\sqrt{2}=3\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)-3\sqrt{2}=3$	**1p** **2p** **2p**
2.	Graficul funcției f nu intersectează axa Ox dacă ecuația $f(x)=0$ nu are soluții reale, adică $\Delta<0$. $\Delta=m^2-4$. Inecuația $m^2-4<0$ are soluțiile reale $m\in(-2;\ 2)$ Soluțiile întregi sunt $m\in\{-1;0;1\}$.	**2p** **2p** **1p**
3.	Condiții de existență: $\begin{cases}2x+1>0\\ x+1>0\end{cases}$, de unde $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ $\log_4(2x+1)^2-\log_4(x+1)=1\Leftrightarrow\ \log_4\frac{(2x+1)^2}{x+1}=1\Leftrightarrow\frac{(2x+1)^2}{x+1}=4$ $4x^2+4x+1=4x+4\leftrightarrow 4x^2=3$ $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Cum $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ obținem $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ soluție.	**1p** **2p** **1p** **1p**
4.	Fie d distanța parcursă în cele 3 zile. În prima zi parcurge $\frac{1}{3}\cdot d$ și rămâne de parcurs după prima zi $\frac{2}{3}\cdot d$. A doua zi parcuge $75\%\ din\ \frac{2}{3}\cdot d$ și rămâne pentru ultima zi de parcurs $25\%\ din\ \frac{2}{3}\cdot d$. Deci $25\%\cdot\frac{2}{3}\cdot d=50$. Obținem $\frac{25}{100}\cdot\frac{2}{3}\cdot d=50\ \Leftrightarrow\frac{d}{6}=50\Leftrightarrow d=300\ km$ În prima zi parcurge $\frac{1}{3}\cdot 300=100$ km	**1p** **1p** **2p** **1p**
5.	Fie BD înălțimea din B a $\Delta ABC, D\in AC\Rightarrow\ m_{BD}\cdot m_{AC}=-1$ $m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$ Obținem $m_{BD}=\frac{2}{3}$ Ecuația înălțimii BD: $y-y_B=m_{BD}\cdot(x-x_B)$, adică $y-1=\frac{2}{3}\cdot(x-3)$	**1p** **2p** **2p**

	Deci ecuația cerută este $2x - 3y - 3 = 0$.	
6.	Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ABC și obținem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cosA$ $cosA = cos120° = cos(180° - 60°) = -cos60° = -\frac{1}{2}$ $BC^2 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 148$ $BC = 2\sqrt{37}$	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1.	$5^3 * 6^3 = \left(\sqrt[3]{5^3} + \sqrt[3]{6^3}\right)^3 =$ $= (5+6)^3 = 11^3$	**3p** **2p**
2.	Legea de compoziție "$*$ " este asociativă pe mulțimea numerelor reale ⇔ $(x * y) * z = x * (y * z), \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x * y) * z = \left(\sqrt[3]{x * y} + \sqrt[3]{z}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)^3} + \sqrt[3]{z}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}\right)^3$ $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (1) $x * (y * z) = \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y * z}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}\right)^3}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}\right)^3$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (2) Din relațiile (1) și (2) rezultă asociativitatea legii de compoziție.	**1p** **2p** **2p**
3.	$\exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$ $x * e = \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{e}\right)^3, \forall\, x \in \mathbb{R}$ (1) $e * x = \left(\sqrt[3]{e} + \sqrt[3]{x}\right)^3, \forall\, x \in \mathbb{R}$ (2) Din (1), (2) și comutativitatea adunării pe $\mathbb{R} \Rightarrow x * e = e * x, \forall\, x \in \mathbb{R}$ $x * e = x, \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{e}\right)^3 = x, \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{e} = \sqrt[3]{x}, \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $e = 0 \in \mathbb{R}$	**1p** **2p** **2p**
4.	$x^3 * (27x^3) = \left(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{27x^3}\right)^3 = (x + 3x)^3 = (4x)^3$. Ecuația este echivalentă cu $(4x)^3 = 40^3 \Leftrightarrow$ $4x = 40 \Leftrightarrow x = 10 \in \mathbb{R}$	**3p** **1p** **1p**
5.	$3^{3x} * 5^{3x+3} = \left(\sqrt[3]{3^{3x}} + \sqrt[3]{5^{3x+3}}\right)^3 = (3^x + 5^{x+1})^3$ $3^{3x+3} * 5^{3x} = \left(\sqrt[3]{3^{3x+3}} + \sqrt[3]{5^{3x}}\right)^3 = (3^{x+1} + 5^x)^3$	**1p**

	Ecuația este echivalentă cu $(3^x+5^{x+1})^3=(3^{x+1}+5^x)^3 \Leftrightarrow 3^x+5^{x+1}=3^{x+1}+5^x \Leftrightarrow$	1p
	$5^{x+1}-5^x=3^{x+1}-3^x \Leftrightarrow 4\cdot 5^x=2\cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$	2p
	$x=\log_{\frac{5}{3}}\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\log_{\frac{5}{3}}2$	1p
6.	Legea de compoziție fiind asociativă obținem $2^3*3^3*4^3*5^3=(2^3*3^3)*(4^3*5^3)=$	1p
	$=\left(\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{3^3}\right)^3*\left(\sqrt[3]{4^3}+\sqrt[3]{5^3}\right)^3=(2+3)^3*(4+5)^3=5^3*9^3=$	2p
	$=\left(\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[3]{9^3}\right)^3=(5+9)^3=14^3=2^3\cdot 7^3$	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1.	$B(1)=A+I_3=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&6&4\\-1&-3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\2&7&4\\-1&-3&-1\end{pmatrix}$	2p
	$detB(1)=\begin{vmatrix}2&3&2\\2&7&4\\-1&-3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0\\2&7&2\\-1&-3&0\end{vmatrix}=-6+12=6$	3p
2.	$A^2=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&6&4\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&2\\2&6&4\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$	1p
	$=\begin{pmatrix}1+6-2&3+18-6&2+12-4\\2+12-4&6+36-12&4+24-8\\-1-6+2&-3-18+6&-2-12+4\end{pmatrix}=$	2p
	$=\begin{pmatrix}5&15&10\\10&30&20\\-5&-15&-10\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}1&3&2\\2&6&4\\-1&-3&-2\end{pmatrix}=5A$	2p
3.	$B(n)\cdot B(n)=(A+n\cdot I_3)\cdot(A+n\cdot I_3)=A^2+nA+nA+n^2I_3=(5+2n)A+n^2I_3$	3p
	$B(n)\cdot B(n)=B(n^2) \Leftrightarrow (5+2n)A+n^2I_3=A+n^2I_3 \Leftrightarrow$	1p
	$2n+5=1 \Leftrightarrow n=-2\in\mathbb{Z}$	1p
4.	$detB(1)=6\neq 0 \Rightarrow$ matricea B(1) este inversabilă și $(B(1))^{-1}=\frac{1}{detB(1)}B(1)^*$, unde $B(1)^*$ este matricea adjunctă a matricei B(1)	1p
	Calculăm transpusa matricei B(1), adică ${}^tB(1)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\3&7&-3\\2&4&-1\end{pmatrix}$	1p
	$B(1)^*=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{13}\\B_{21}&B_{22}&B_{23}\\B_{31}&B_{32}&B_{33}\end{pmatrix}$, $B_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}7&-3\\4&-1\end{vmatrix}=-7+12=5$ $B_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3&-3\\2&-1\end{vmatrix}=-(-3+6)=-3$ $B_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3&7\\2&4\end{vmatrix}=12-14=-2$ Analog calculăm ceilalți complemenți algebrici și obținem	2p

	$B_{21}=-2, B_{22}=0, B_{23}=-4, B_{31}=1, B_{32}=3, B_{33}=8$ Deci $(B(1))^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -3 & -2\\ -2 & 0 & -4\\ 1 & 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$	**1p**
5.	$B(x)=A+x\cdot I_3=\begin{pmatrix}1+x & 3 & 2\\ 2 & 6+x & 4\\ -1 & -3 & -2+x\end{pmatrix}$ $detB(x)=\begin{vmatrix}1+x & 3 & 2\\ 2 & 6+x & 4\\ -1 & -3 & -2+x\end{vmatrix}=x^3+5\cdot x^2=x^2\cdot(x+5)$ $det\big(B(x)\big)\le 0 \Leftrightarrow\ x^2\cdot(x+5)\le 0$ Cum $x^2\ge 0, \forall\, x\in\mathbb{R}$ obținem $x+5\le 0$ sau $x=0$. Deci $x\in(-\infty,-5]\cup\{0\}$.	**1p** **3p** **1p**
6.	$A^2=5\cdot A,\ \ A^3=A^2\cdot A=5\cdot A\cdot A=5\cdot A^2=5\cdot 5\cdot A=5^2\cdot A$ $A^4=A^2\cdot A^2=5A\cdot 5A=5^2\cdot A^2=5^2\cdot 5A=5^3\cdot A$ Analog $A^5=5^4\cdot A,\ \ A^6=5^5\cdot A, \dots, A^{10}=5^9\cdot A$ $A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}=A+5A+5^2\cdot A+5^3\cdot A+\cdots+5^9\cdot A=$ $=(1+5+5^2+5^3+\cdots+5^9)\cdot A=\frac{5^{10}-1}{4}A=$ $=\begin{pmatrix}\frac{5^{10}-1}{4} & \frac{3(5^{10}-1)}{4} & \frac{5^{10}-1}{2}\\ \frac{5^{10}-1}{2} & \frac{3(5^{10}-1)}{2} & 5^{10}-1\\ \frac{-5^{10}+1}{4} & \frac{-3(5^{10}-1)}{4} & -\frac{5^{10}-1}{2}\end{pmatrix}$	**2p** **2p** **1p**

Test propus de profesor Grigore Mirela,

Colegiul Național " Costache Negri " Galați