

APLICAȚII ALE NUMERELOR COMPLEXE ÎN GEOMETRIE

Profesor: Amariei Laura Georgeta
Școala Gimnazială Nr. 28 - Galați

Utilitatea studierii numerelor complexe este demonstrată și de folosirea lor în rezolvarea unor probleme de geometrie.

Deși metoda vectorială și metoda numerelor complexe sunt echivalente, fiecare dintre ele rezolvă cu ușurință anumite probleme și în același timp creează, în limbajul lor specific, noi probleme.

CONSIDERAȚII TEORETICE

Pentru o mai bună înțelegere a aplicațiilor ce vor fi studiate în prezenta lucrare, se vor introduce următoarele noțiuni:

Fie $A(x, y)$ un punct din sistemul de coordonate xOy . Acest punct are ca afix numărul complex $z = x + iy$, unde $i^2 = -1$.

Deci prin asocierea $z = x + iy \leftrightarrow A(x, y)$, mulțimii $\mathbf{R}$ a numerelor reale îi corespunde axa Ox numită *axa reală*, iar mulțimii $i\mathbf{R}$ a numerelor imaginare axa Oy numită *axa imaginară*.

1) Împărțirea unui segment într-un raport dat.

Fie A_1, A_2 puncte distincte din plan, de afixe z_1 , respectiv z_2 și fie P un punct pe dreapta A_1A_2 , astfel încât $\overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{PA_2}$, unde $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq -1$. Dacă P are afixul z_p , atunci: $z_p = \frac{1}{\lambda + 1} \cdot z_1 + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot z_2$.

Formula reprezintă afixul punctului care împarte un segment într-un raport dat. Demonstrația formulei folosește expresia vectorială a punctului P :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\lambda + 1} \cdot \overrightarrow{OA_1} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \overrightarrow{OA_2}.$$

2) Afixul mijlocului unui segment.

Dacă P este mijlocul segmentului $[A_1A_2]$, atunci $\lambda = 1$. Din formula precedentă se obține: $z_p = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

3) Centrul de greutate al unui triunghi.

Fie $\triangle ABC$ un triunghi ale cărui vârfuri au afixe z_A, z_B, z_C . Atunci centrul de greutate G al triunghiului are afixul $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C)$.

4) Distanța dintre două puncte; ecuația cercului.

Dacă A_1 și A_2 sunt puncte în plan de afixe z_1 , respectiv z_2 , atunci lungimea segmentului $[A_1A_2]$ este $|A_1A_2| = |z_2 - z_1|$.

Rezultă că cercul de centru $A_0(z_0)$ și rază r are ecuația $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$.

5) Ecuația dreptei care trece prin două puncte.

Fie A_1 și A_2 două puncte distincte din plan de afixe z_1 , respectiv z_2 . Atunci dreapta A_1A_2 reprezintă mulțimea punctelor din plan ale căror afixe z sunt de forma: $z = (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

6) O altă formă a ecuației unei drepte în C

Punctul P aparține dreptei A_1A_2 dacă și numai dacă afixul său z verifică egalitatea: $z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}(\bar{z} - \bar{z}_1)$.

7) Ortocentrul unui triunghi. Dreapta lui Euler.

Fie $\triangle ABC$ un triunghi înscris într-un cerc cu centrul în originea O a sistemului cartezian xOy . Înălțimile AA_1, BB_1 și CC_1 ale triunghiului sunt concurente într-un punct H care îndeplinește condiția vectorială: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, adică $z_H = z_A + z_B + z_C$.

8) Centrul cercului înscris într-un triunghi

Fie $\triangle ABC$ un triunghi ale cărui laturi BC, CA, AB au respectiv lungimile a, b, c . Centrul I al cercului înscris în $\triangle ABC$ are afixul $z_I = \frac{1}{a+b+c}(az_A + bz_B + cz_C)$.

9) Condiția de coliniaritate a trei puncte

Punctele $A_1(z_1), A_2(z_2), A_3(z_3)$ sunt coliniare dacă și numai dacă există $a, b, c \in \mathbf{R}$, cu $a + b + c = 0$ astfel încât $az_1 + bz_2 + cz_3 = 0$.
sau

Punctele $A_1(z_1), A_2(z_2), A_3(z_3)$ sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbf{R}$.

10) Condiția de perpendicularitate a două drepte

Punctele distincte $A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D)$ sunt situate pe dreptele perpendiculare AB și CD dacă și numai dacă $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in i\mathbf{R}^*$.

11) Unghiul a două drepte

Dacă $A_1(z_1), A_2(z_2), A_3(z_3), A_4(z_4)$ sunt puncte distincte în plan, diferite de origine, atunci măsura unghiului orientat (în sens trigonometric) al dreptelor A_1A_2 și A_3A_4 este $\mu(<(A_1A_2, A_3A_4)) = \arg \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$.

12) Triunghiuri asemenea

Triunghiurile $\Delta A_1 A_2 A_3$ și $\Delta A'_1 A'_2 A'_3$, la fel orientate, sunt asemenea, în această ordine, dacă și numai dacă $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z'_2 - z'_1}{z'_3 - z'_1}$.

Dacă triunghiurile sunt invers orientate, atunci $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{z'_2 - z'_1}}{\overline{z'_3 - z'_1}}$.

13) Triunghi echilateral

a) Triunghiul $\Delta A_1 A_2 A_3$ este echilateral dacă și numai dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$.

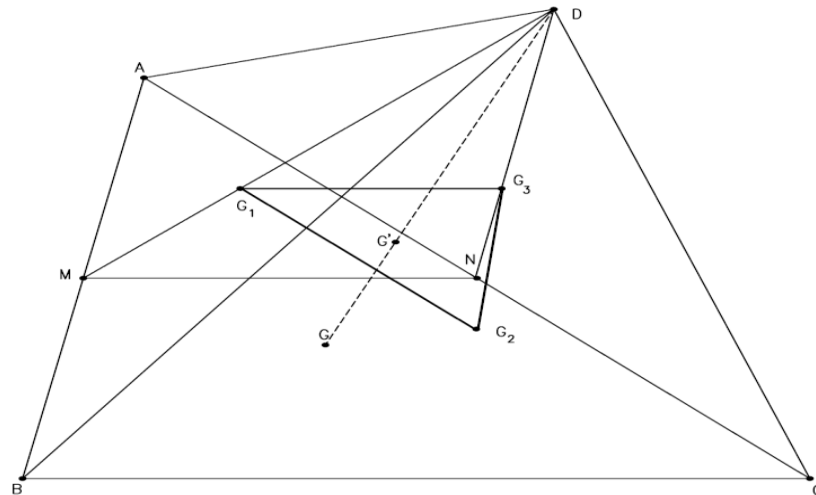
b) Triunghiul $\Delta A_1 A_2 A_3$ este echilateral dacă și numai dacă $z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)\varepsilon$ (formula rotației), unde $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, dacă $\Delta A_1 A_2 A_3$ este orientat în sens trigonometric, sau $\varepsilon = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$, dacă $\Delta A_1 A_2 A_3$ este orientat în sens invers trigonometric.

14) Aria unui triunghi

Dacă z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor triunghiului $\Delta A_1 A_2 A_3$ (notat în sens trigonometric), atunci $S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \overline{z_3 z_1})$

APLICAȚII

A1. În planul triunghiului ΔABC se consideră un punct $D \notin AB \cup BC \cup CA$. Dacă G, G_1, G_2, G_3 , respectiv G' sunt centre de greutate ale triunghiurilor ΔABC , ΔDAB , ΔDBC , ΔDCA , $\Delta G_1 G_2 G_3$, să se arate că $\Delta G_1 G_2 G_3 \sim \Delta ABC$.



Soluție:

Se consideră punctele $A(a), B(b), C(c), D(d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Centrele de greutate vor fi date prin: $G\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$, $G_1\left(\frac{a+b+d}{3}\right)$, $G_2\left(\frac{b+c+d}{3}\right)$, $G_3\left(\frac{a+c+d}{3}\right)$, respectiv $G'\left(\frac{2a+2b+2c+3d}{9}\right)$.

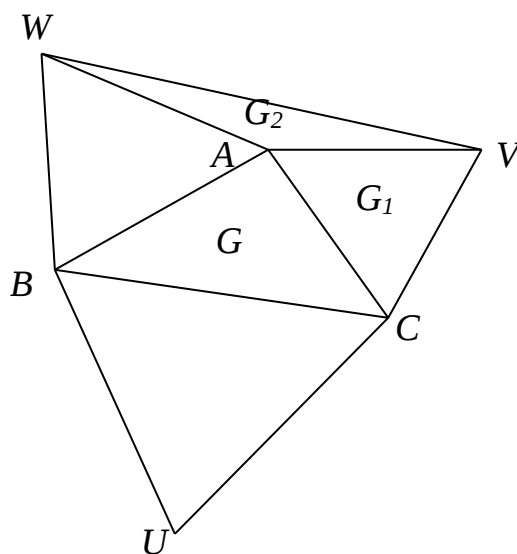
În aceste condiții:

$$\left. \begin{aligned} g_2 - g_1 &= \frac{c-a}{3} \Rightarrow |g_2 - g_1| = \frac{1}{3}|c-a| \Rightarrow G_1G_2 = \frac{1}{3}AC \\ g_3 - g_1 &= \frac{c-b}{3} \Rightarrow |g_3 - g_1| = \frac{1}{3}|c-b| \Rightarrow G_1G_3 = \frac{1}{3}BC \\ g_3 - g_2 &= \frac{a-b}{3} \Rightarrow |g_3 - g_2| = \frac{1}{3}|a-b| \Rightarrow G_2G_3 = \frac{1}{3}AB \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{G_1G_2}{AC} = \frac{G_1G_3}{BC} = \frac{G_2G_3}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta ABC. \blacksquare$$

A2. Fie ΔBCU , ΔACV și ΔABW triunghiuri echilaterale construite în exteriorul ΔABC . Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor ΔVAW , ΔWBU , ΔUCV , ΔABC , ΔCAV și ΔABW sunt vârfurile unui hexagon regulat cu centrul în centrul de greutate al triunghiului ΔABC .

Soluție:



Fie G, G_1, G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ΔABC , ΔACV , respectiv ΔVAW .

Fixăm sistemul de axe de coordonate xOy cu originea în punctul A . Notăm cu $a=0, b, c, u, v, w$ afixele punctelor A, B, C, U, V, W .

În aceste condiții avem: $g = \frac{b+c}{3}$, $g_1 = \frac{c+v}{3}$, $g_2 = \frac{v+w}{3}$.

Cum $\triangle ABW$ este echilateral, atunci punctul W este obținut prin rotația punctului B în jurul punctul A , în sens invers trigonometric, cu unghiul $\frac{\pi}{3}$, deci $w = a + (b - a)\bar{\varepsilon} \Rightarrow w = b\bar{\varepsilon}$.

Analog punctul V este obținut prin rotația punctului C în jurul punctul A , în sens trigonometric, cu unghiul $\frac{\pi}{3}$, deci și $v = c\varepsilon$.

Vom demonstra că triunghiul $\triangle GG_1G_2$ este echilateral, adică: $(g_1 - g)\varepsilon = g_2 - g$.

$$\text{Dar } (g_1 - g)\varepsilon = \frac{(c + c\varepsilon - b - c)\varepsilon}{3} = \frac{c\varepsilon^2 - b\varepsilon}{3} \text{ și } g_2 - g = \frac{c\varepsilon + b\bar{\varepsilon} - b - c}{3}.$$

Cum $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$ și $\bar{\varepsilon} = 1 - \varepsilon$, rezultă că:

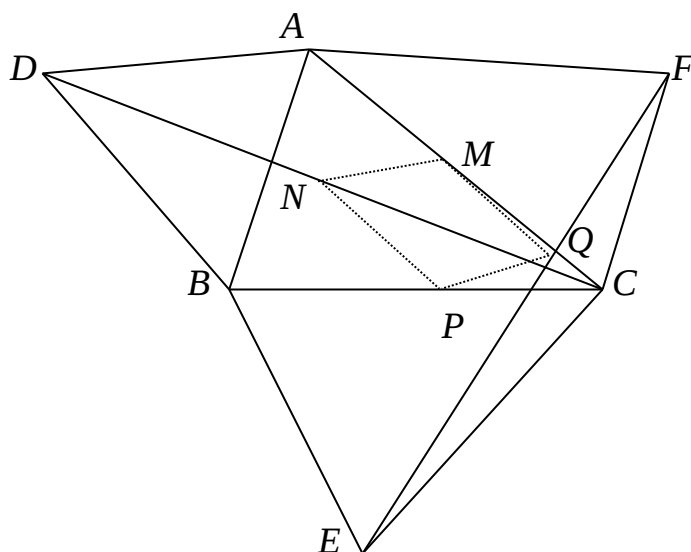
$$c(\varepsilon - 1) - b\varepsilon = c\varepsilon + b(1 - \varepsilon) - b - c,$$

de unde deducem că triunghiul $\triangle GG_1G_2$ este echilateral.

Analog se demonstrează că toate triunghiurile de același tip sunt echilaterale, de unde rezultă concluzia aplicației. ■

A3. Pe laturile triunghiului $\triangle ABC$ se construiesc în exterior triunghiurile $\triangle ADB$, $\triangle BEC$ și $\triangle CFA$ astfel încât $\frac{AD}{BD} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA}$ și $m(\angle ADB) = m(\angle BEC) = m(\angle CFA)$. Să se arate că mijloacele M, N, P, Q ale segmentelor $[AC]$, $[DC]$, $[BC]$, respectiv $[EF]$ sunt vârfurile unui paralelogram.

Soluție:



Notăm cu $a, b, c, d, e, f, m, n, p, q$ afixele punctelor $A, B, C, D, E, F, M, N, P$, respectiv Q .

$$\text{Din } \frac{AD}{BD} = \frac{BE}{EC} \text{ și } m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BEC}) \xRightarrow{L.U.L} \triangle ADB \sim \triangle BEC$$

$$\frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} \text{ și } m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{CFA}) \xRightarrow{L.U.L} \triangle BEC \sim \triangle CFA.$$

$$\text{Din } \left. \begin{array}{l} \triangle ADB \sim \triangle BEC \Rightarrow \frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} \\ \triangle BEC \sim \triangle CFA \Rightarrow \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} = k, \text{ deci}$$

$$\left. \begin{array}{l} d = a + k(b-a) \\ e = b + k(c-b) \\ f = c + k(a-c) \end{array} \right\} \Rightarrow d + e + f = a + b + c + k(a+b+c) - k(a+b+c), \quad \text{adică}$$

$d + e + f = a + b + c$ sau $\frac{d+e+f}{3} = \frac{a+b+c}{3}$, de unde rezultă că triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle DEF$ au același centru de greutate.

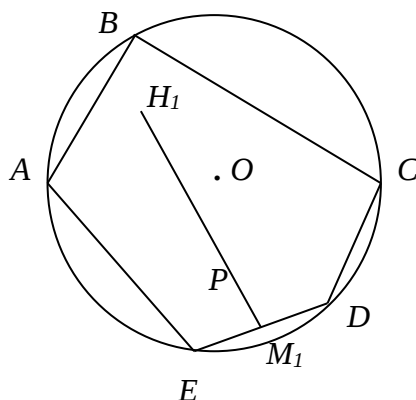
$$\text{Cum } m = \frac{a+c}{2}, n = \frac{d+c}{2}, p = \frac{b+c}{2} \text{ și } q = \frac{e+f}{2} \text{ rezultă că:}$$

$$m + p = \frac{a+b+2c}{2} \text{ și } n + q = \frac{d+c+e+f}{2}.$$

Cum $d + e + f = a + b + c$, rezultă că $n + q = m + p$, adică $MNPQ$ este paralelogram. ■

A4. Se consideră pentagonul inscriptibil $ABCDE$. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 ortocentrele triunghiurilor $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDE, \triangle DEA$ și $\triangle EAB$ și cu M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 mijloacele laturilor $[DE], [EA], [AB], [BC]$, respectiv $[CD]$. Să se arate că dreptele $H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3, H_4M_4, H_5M_5$ sunt concurente.

Soluție:



Fie O - centrul cercului circumscris pentagonului, originea sistemului de axe de coordonate xOy . Dacă afixele punctelor A, B, C, D, E sunt a, b, c, d , respectiv e , atunci afixul ortocentrului H_1 este $h_1 = a + b + c$, iar afixul punctului M_1 este

$m_1 = \frac{d+e}{2}$. Analog se scriu și celelalte relații pentru ortocentre și mijloacele laturilor.

Un punct P_1 , de afix p_1 , aparține dreptei H_1M_1 dacă și numai dacă există $t_1 \in \mathbf{R}$ astfel încât $p_1 = (1-t_1)(a+b+c) + t_1 \cdot \frac{d+e}{2}$.

$P_2(p_2) \in H_2M_2$ dacă și numai dacă există $t_2 \in \mathbf{R}$ astfel încât $p_2 = (1-t_2)(b+c+d) + t_2 \cdot \frac{e+a}{2}$.

$P_3(p_3) \in H_3M_3$ dacă și numai dacă există $t_3 \in \mathbf{R}$ astfel încât $p_3 = (1-t_3)(c+d+e) + t_3 \cdot \frac{a+b}{2}$.

$P_4(p_4) \in H_4M_4$ dacă și numai dacă există $t_4 \in \mathbf{R}$ astfel încât $p_4 = (1-t_4)(d+e+a) + t_4 \cdot \frac{b+c}{2}$.

$P_5(p_5) \in H_5M_5$ dacă și numai dacă există $t_5 \in \mathbf{R}$ astfel încât $p_5 = (1-t_5)(e+a+b) + t_5 \cdot \frac{c+d}{2}$.

Pentru $t_i = \frac{2}{3}$, oricare ar fi $i = \overline{1,5}$, avem $p_i = \frac{a+b+c+d+e}{3}$, deci există $P \in H_iM_i$, adică dreptele $H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3, H_4M_4, H_5M_5$ sunt concurente. ■

BIBLIOGRAFIE

1. **Gazeta matematică** nr. 4, 2001;
2. **Matematica pentru elevi** (supliment al ziarului *Viața Nouă Galați*), nr. 1, 1986;
3. **Matematica pentru elevi** (supliment al ziarului *Viața Nouă Galați*), nr. 5-6, 1988;