

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Profesor: AMARIEI LAURA-GEORGETA
Școala Gimnazială Nr. 28 – Galați

§1. INTRODUCERE

În această lucrare vor fi prezentate succint aspecte teoretice referitoare la noțiunea de asemănare a triunghiurilor, respectiv asemănarea ca relație de echivalență, criteriile de asemănare, rezultatele importante ale acestui capitol al geometriei și implicațiile ce decurg din teorema lui Thales și/sau teorema fundamentală a asemănării.

Astfel, pe parcursul lucrării, cu ajutorul noțiunii de asemănare a triunghiurilor, vor fi demonstrate teoreme ce fac referire la coliniaritate (teorema lui Menelaus), concurență (teorema lui Ceva) și rezultate prin intermediul cărora se pot calcula lungimi de laturi sau segmente (teorema catetei, teorema lui Pitagora, teorema bisectoarei).

În cuprinsul lucrării se propun metode de rezolvare pentru aplicații cu grade diferite de dificultate, prin care se ilustrează importanța relației de asemănare a triunghiurilor și a teoremelor menționate mai sus.

§2. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR TEOREMA LUI THALES. TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII

Definiție: Fie triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$. Dacă

$$(1) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

și

$$(2) \quad \hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}'$$

se spune că există o **asemănare** între triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ și se scrie $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Ca și în cazul congruenței, între două triunghiuri pot exista mai multe asemănări.

Definiție: Două triunghiuri $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ se numesc **asemenea** dacă între ele există cel puțin o asemănare.

Proprietăți:

1. Asemănarea triunghiurilor este o relație de echivalență:

➤ Reflexivă: $\triangle ABC \sim \triangle ABC$;

- Simetrică: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$;
- Tranzitivă: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ și $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C'' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

2. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ și $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

Prin notația $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ se înțelege că ordinea vârfurilor este dată și are loc asemănarea definită de egalitățile (1) și (2). În acest caz, perechile de vârfuri (A,A') , (B,B') , (C,C') și perechile de laturi $((AB),(A'B'))$, $((AC),(A'C'))$, $((BC),(B'C'))$ se numesc **corespondente** sau **omoloage**. Raportul lungimilor a două laturi omoloage se numește **raportul de asemănare** al celor două triunghiuri.

Observație.

1. Două triunghiuri congruente sunt asemenea, iar raportul de asemănare este 1.
2. Oricare două triunghiuri echilaterale sunt asemenea.
3. Dacă două triunghiuri sunt asemenea, iar raportul de asemănare este k , atunci raportul ariilor celor două triunghiuri este k^2 .

Teorema lui Thales: Fie triunghiul $\triangle ABC$ și $DE \parallel BC$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$.

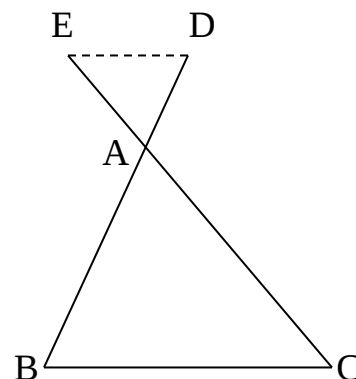
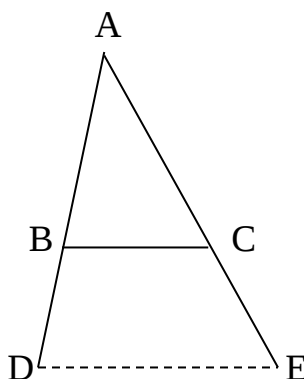
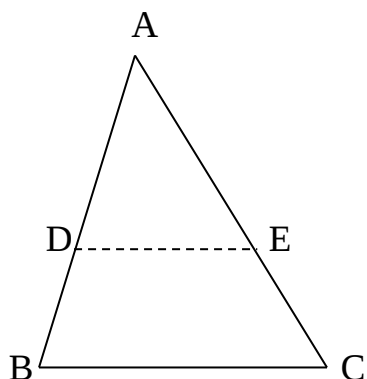
Atunci $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Observație. Enunțul teoremei lui Thales este mai ușor de reprodus în forma: O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.

Folosind proprietățile proporțiilor se pot obține și alte egalități echivalente cu $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ și anume: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ sau $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

Consecință a teoremei lui Thales: Fie triunghiul $\triangle ABC$ și $d \parallel BC$, astfel încât $\{D\} = d \cap AB$, $\{E\} = d \cap AC$, $A \notin d$. Atunci $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

În acest context, se disting următoarele trei situații:



Reciproca teoremei lui Thales: Fie triunghiul $\triangle ABC$ și $D \in (AB$, respectiv $E \in (AC$ astfel încât $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ sau $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ sau $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$, atunci $DE \parallel BC$.

Cele trei rezultate anterioare pot fi enunțate și astfel:

Teoremă: Fie triunghiul $\triangle ABC$ și punctele D și E distincte, diferite de A , $D \in AB$ și $E \in AC$ astfel încât ambele se află pe laturile unghiului $\hat{A}$ sau pe prelungirile acestora. Atunci $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ dacă și numai dacă $DE \parallel BC$.

Această teoremă are numeroase aplicații în probleme care cer stabilirea unor relații între lungimi de segmente sau în demonstrarea paralelismului a două drepte.

Cazurile de asemănare: Fie triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$.

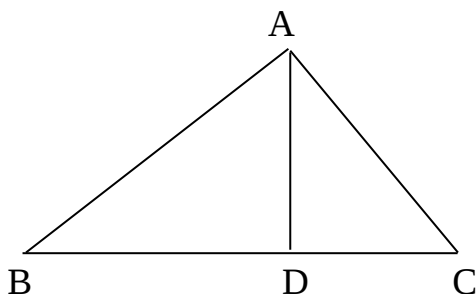
1. (U.U.) Dacă $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ și $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
2. (L.U.L.) Dacă $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
3. (L.L.L.) Dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Teorema fundamentală a asemănării: Fie triunghiul $\triangle ABC$ și $DE \parallel BC$, unde $D \in AB$ și $E \in AC$, $D \neq A$. Atunci $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

§3. REZULTATE IMPORTANTE CARE SE DEDUC DIN ASEMĂNAREA TRIUNGHURIILOR

Teorema catetei: Lungimea catetei unui triunghi dreptunghic este medie proporțională între lungimea ipotenuzei și a proiecției catetei pe ipotenuză.

Demonstrație: Fie triunghiul dreptunghic $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$) și AD înălțimea dusă din vârful A .



Se observă că triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle DAC$ au unghiul $\hat{C}$ comun și câte un unghi drept, deci $\hat{C} \equiv \hat{C}$ și $\hat{A} \equiv \hat{D}$. Conform cazului de asemănare U.U., avem că

$\triangle ABC \sim \triangle DAC$, de unde rezultă că $\frac{AB}{DA} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$. Din ultima egalitate obținem $AC^2 = BC \cdot DC$.

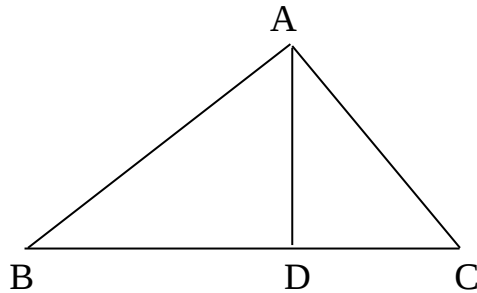
Analog, $\triangle ABC \sim \triangle DBC$, de unde rezultă că $AB^2 = BC \cdot BD$. ▣

Adunând cele două relații din teorema catetei obținem $AB^2 + AC^2 = BC^2$, deci:

Teorema lui PITAGORA: Într-un triunghi dreptunghic pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

Teorema înălțimii: Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii dusă din vârful unghiului drept este medie proporțională între lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Demonstrație. Fie triunghiul dreptunghic $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$) și AD înălțimea dusă din vârful A .

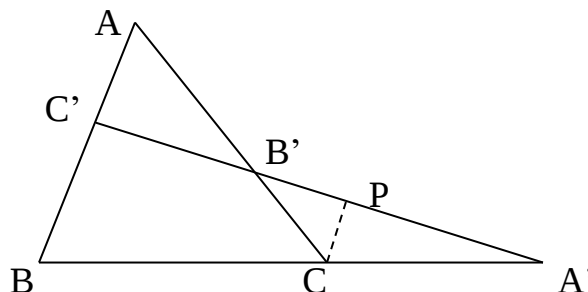


Cum $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ și $\triangle ABC \sim \triangle DBA$, din tranzitivitatea asemănării triunghiurilor rezultă că $\triangle DAC \sim \triangle DBA$, de unde $\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD} = \frac{AC}{AB}$. Din prima egalitate rezultă că $AD^2 = BD \cdot DC$. ▣

Teorema lui Menelaus: Fie triunghiul $\triangle ABC$ și A' , B' , C' trei puncte coliniare distincte astfel încât $A' \in BC$, $B' \in AC$ și $C' \in AB$. Atunci

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Demonstrație. Fie CP o paralelă la AB , unde $P \in A'B'$.



Cum $CP \parallel BC'$, rezultă conform teoremei fundamentale a asemănării că $\triangle CPA' \sim \triangle BC'A'$ și deci $\frac{CP}{C'B} = \frac{A'C}{A'B} = \frac{PA'}{C'A'}$.

Dar $CP \parallel C'A$ și conform teoremei fundamentale a asemănării $\triangle AB'C' \sim \triangle CB'P$, de unde obținem $\frac{C'A}{CP} = \frac{B'A}{B'C} = \frac{B'C'}{B'P}$.

Păstrând doar prima egalitate din cele două șiruri de rapoarte egale și înmulțind relațiile obținem: $\frac{CP}{C'B} \cdot \frac{C'A}{CP} = \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \Leftrightarrow \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1. \blacksquare$

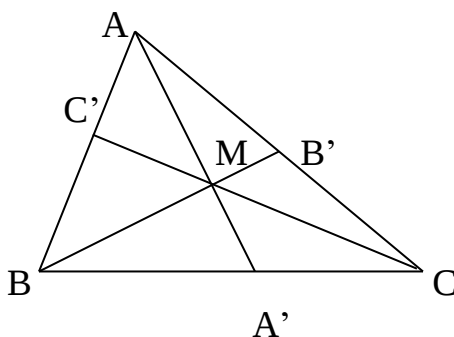
Relația din enunț se păstrează și în cazul în care punctele A' , B' , C' se află pe prelungirile laturilor.

Reciproca teoremei lui Menelaus este adevărată și reprezintă o condiție de coliniaritate a trei puncte distincte.

Teorema lui Ceva: Fie triunghiul $\triangle ABC$ și AA' , BB' , CC' trei drepte concurente, unde $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$. Atunci

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Demonstrație.



Se observă că punctele coliniare C' , M și C îndeplinesc condițiile teoremei lui Menelaus în triunghiul $\triangle ABA'$ și deci $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{CB}{A'C} \cdot \frac{A'M}{MA} = 1$.

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul $\triangle AA'C$ pentru punctele coliniare B , M și B' obținem $\frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{AM}{MA'} \cdot \frac{A'B}{BC} = 1$.

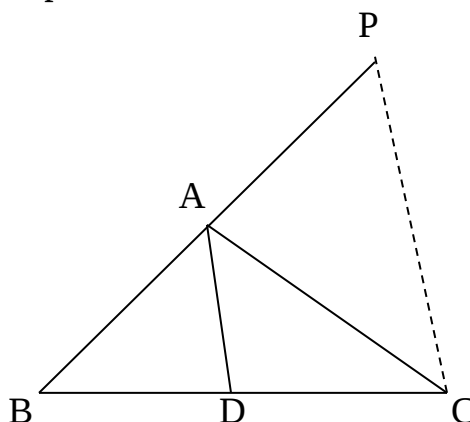
Înmulțind cele două relații rezultă $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{CB}{A'C} \cdot \frac{A'M}{MA} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{AM}{MA'} \cdot \frac{A'B}{BC} = 1$ și după simplificare obținem $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1. \blacksquare$

Reciproca teoremei lui Ceva este adevărată și reprezintă o condiție pentru concurența a trei drepte.

Teorema bisectoarei: Fie triunghiul $\triangle ABC$ și $[AD]$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$, unde $D \in BC$. Atunci

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

Demonstrație: Fie CP o paralela la AD , unde $P \in AB$.



Cum $AD \parallel PC$, rezultă conform teoremei lui Thales că $\frac{AB}{AP} = \frac{BD}{DC}$.

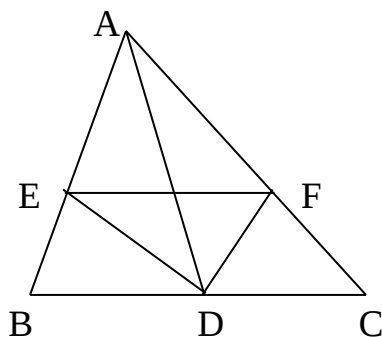
Dar $[AD]$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$, implică $\hat{BAD} \equiv \hat{CAD}$. Dar $\hat{CAD} \equiv \hat{ACP}$ (alterne interne) și $\hat{BAD} \equiv \hat{BPC}$ (corespondente), de unde rezultă că $\hat{ACP} \equiv \hat{APC}$, adică $\triangle ACP$ isoscel cu $[AC] \equiv [AP]$.

În aceste condiții, relația obținută din teorema lui Thales devine $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$. ■

§4. APLICAȚII

Problema 1. Fie D mijlocul laturii BC a triunghiului $\triangle ABC$. Bisectoarea unghiului $\hat{ADB}$ intersectează latura AB în punctul E , iar bisectoarea unghiului $\hat{ADC}$ intersectează latura AC în punctul F . Să se demonstreze că $EF \parallel BC$.

Demonstrație.

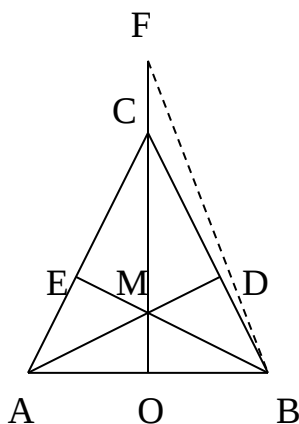


Aplicând teorema bisectoarei în triunghiurile $\triangle ADB$, respectiv $\triangle ADC$ obținem $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB}$ și $\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FC}$. Cum $BD = DC$, rezultă că $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$. Aplicând reciproca teoremei lui Thales rezultă că $EF \parallel BC$. ■

Problema 2. Fie AD , BE și CO înălțimile triunghiului isoscel $\triangle ABC$ (cu $CA = CB$) și M ortocentrul triunghiului, unde $D \in BC$, $E \in AC$, $O \in AB$. Se consideră punctul F pe dreapta CO astfel încât $C \in [FO]$ și $CF = MO$. Demonstrați că:

- $BM \cdot BE = 2(MO \cdot CO)$;
- $BM^2 = OF \cdot OM$;
- $BF^2 = BC^2 + BM^2 + BO^2$.

Demonstrație.



a) Conform cazului de asemănare U.U. avem $\triangle OBM \sim \triangle EBA$, de unde rezultă $\frac{BM}{AB} = \frac{BO}{BE} \Leftrightarrow BM \cdot BE = AB \cdot BO$. Cum $AB = 2BO$ rezultă că $BM \cdot BE = 2BO^2$. (1)

Dar $\triangle OBM \sim \triangle OCA$ și deci $\frac{OB}{OC} = \frac{BM}{CA} = \frac{OM}{OA}$, de unde rezultă $OM \cdot OC = OB \cdot OA$. Cum $OB = OA$ rezultă că $OM \cdot OC = OB^2$. (2)

Din (1) și (2) obținem $BM \cdot BE = 2(MO \cdot CO)$.

b) Cum triunghiul $\triangle OBM$ este dreptunghic în $\hat{O}$, din teorema lui Pitagora rezultă că $OB^2 + OM^2 = BM^2$ (3).

Ținând cont de relația (2) și de faptul că $CF = MO$ (din ipoteză), relația (3) devine $BM^2 = MO \cdot OC + MO^2 \Leftrightarrow BM^2 = MO(MO + OC) \Leftrightarrow BM^2 = MO(FC + CO) \Leftrightarrow BM^2 = MO \cdot FO$.

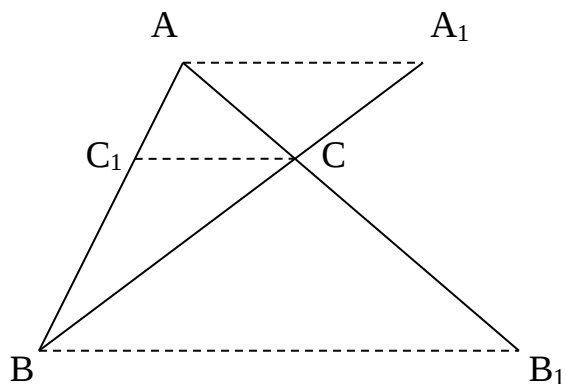
c) Cum triunghiul $\triangle OBF$ este dreptunghic în $\hat{O}$, din teorema lui Pitagora rezultă că $OF^2 = OB^2 + OM^2$ (4).

Dar $OF^2 = (CO + OM)^2 = CO^2 + OM^2 + 2CO \cdot OM$ și în baza relației (2) obținem $OF^2 = CO^2 + OM^2 + 2BO^2 = CO^2 + BO^2 + OM^2 + BO^2 \Leftrightarrow OF^2 = BC^2 + BM^2$ (5).

Înlocuind relația (5) în relația (4) obținem $BF^2 = BC^2 + BM^2 + BO^2$. ■

Problema 3. Pe latura AB a triunghiului $\triangle ABC$ se consideră punctul C_1 . Prin A se construiește paralela la CC_1 care intersectează BC în punctul A_1 și prin B paralela la CC_1 care intersectează AC în B_1 . Să se demonstreze că $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{CC_1}$.

Demonstrație.



Cum $CC_1 \parallel BB_1$ rezultă, conform teoremei fundamentale a asemănării, că $\triangle AC_1C \sim \triangle ABB_1$ și deci $\frac{AC_1}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1}$.

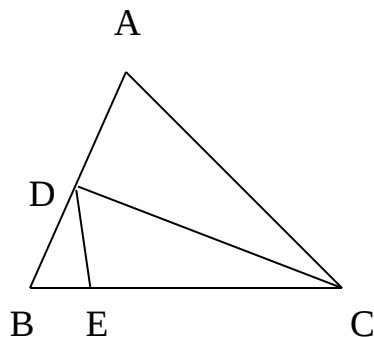
Analog $BB_1 \parallel AA_1 \Rightarrow \triangle BC_1C \sim \triangle BAA_1 \Rightarrow \frac{C_1B}{AB} = \frac{CC_1}{AA_1}$.

Adunând cele două relații rezultă $\frac{CC_1}{AA_1} + \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{C_1A}{AB} + \frac{C_1B}{AB} = 1 \Leftrightarrow$

$$CC_1 \left(\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{CC_1}. \blacksquare$$

Problema 4. În triunghiul $\triangle ABC$ se consideră bisectoarea unghiului $\hat{C}$ care intersectează latura AB în punctul D . Demonstrați că $CD < \sqrt{AC \cdot BC}$.

Demonstrație.

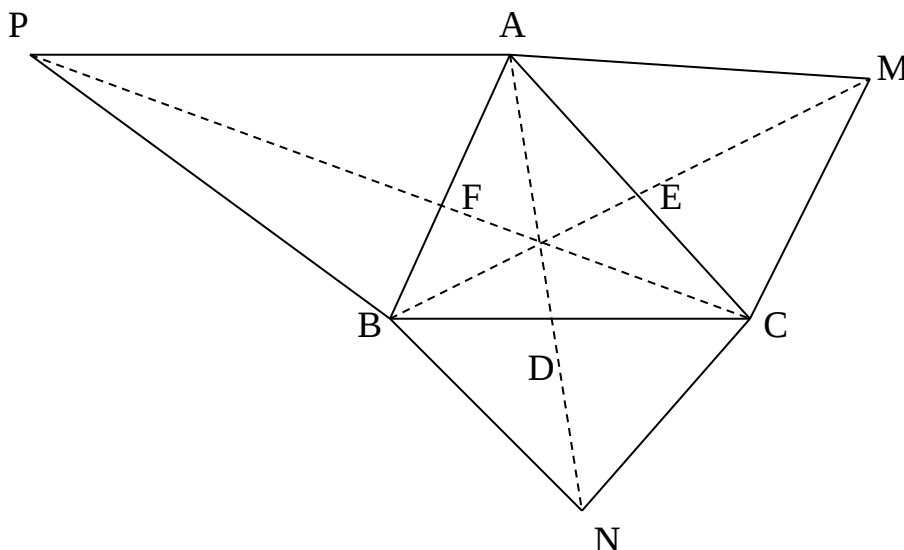


Fie $E \in (AC)$ astfel încât $\angle CDE \equiv \angle CBD$. Conform cazului de asemănare U.U., avem $\triangle CDE \sim \triangle CBD$ și deci $\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD}$, adică $CD^2 = CB \cdot CE$.

Deoarece $\widehat{CDA} > \widehat{CBD} \Leftrightarrow \widehat{CDA} > \widehat{CDE}$, rezultă că $CA > CE$, ceea ce implică $CD^2 < CB \cdot CA$, adică $CD < \sqrt{AC \cdot BC}$. ■

Problema 5. În exteriorul triunghiului $\triangle ABC$ se consideră punctele M, N, P astfel încât $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ACM} \equiv \widehat{BCN}$, $\widehat{BCA} \equiv \widehat{CBN} \equiv \widehat{ABP}$, respectiv $\widehat{ABC} \equiv \widehat{PAB} \equiv \widehat{CAM}$. Demonstrați că dreptele BM, AN și CP sunt concurente.

Demonstrație.



Din definiția unghiurilor alterne interne rezultă că semidreptele $[CA$ și $[BN$ sunt conținute în semiplane opuse față de BC , ceea ce implică $ABNC$ – trapez ($AC \parallel BN$).

Analog $ABCM$ și $APBC$ sunt trapeze, cu $AB \parallel MC$, respectiv $AP \parallel BC$.

Fie $\{E\} = BM \cap AC$, $\{D\} = AN \cap BC$ și $\{F\} = CP \cap AB$.

Cum $AB \parallel MC$, rezultă conform teoremei fundamentale a asemănării că

$$\triangle EMC \sim \triangle EBA \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{CM} \quad (1).$$

$$\text{Conform cazului de asemănare U.U., } \triangle ABC \sim \triangle CAM \Rightarrow \frac{AC}{CM} = \frac{AB}{CA} \Leftrightarrow AC^2 = CM \cdot AB \quad (2).$$

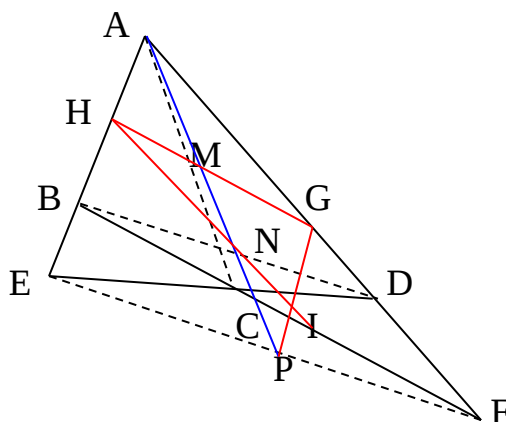
$$\text{Înlocuind (2) în (1) obținem că } \frac{EA}{EC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

$$\text{Analog obținem relațiile } \frac{DC}{DB} = \frac{AC^2}{BC^2}, \text{ respectiv } \frac{FB}{FA} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Prin înmulțirea celor trei egalități obținem că $\frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FA} = 1$ și, în baza reciprocei teoremei lui Ceva, rezultă că dreptele BM, AN și CP sunt concurente. ■

Problema 6. Demonstrați că mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt coliniare (**dreapta lui Newton-Gauss**).

Demonstrație.



Fie patrulaterul $ABCD$ și E , respectiv F vârfurile patrulaterului complet obținute prin prelungirea laturilor. Fie M , N și P mijloacele diagonalelor AC , BD și EF .

Construim $PG \parallel AE$, $G \in AF$, $GH \parallel BF$, $H \in AE$ și $HI \parallel AF$, $I \in BF$.

Cum P este mijlocul lui EF , rezultă că PG este linie mijlocie în $\triangle AEF$ și intersectează BF în mijlocul acesteia. Analog GH este linie mijlocie în $\triangle ABF$ și intersectează AC în mijlocul ei, deci $M \in GH$. De asemenea, HI este linie mijlocie în $\triangle ABF$ și intersectează BD în mijlocul ei, deci $N \in HI$.

Se observă că punctele E , C și D îndeplinesc condițiile teoremei lui Menelaus pentru $\triangle ABF$ și obținem $\frac{AD}{DF} \cdot \frac{FC}{CB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1$.

Dar $AD = 2HN$, $DF = 2NI$, $FC = 2GM$, $CB = 2MH$, $BE = 2PI$, $EA = 2PG$ (din teorema liniei mijlocii). Având în vedere aceste relații, egalitatea anterioară devine

$\frac{HN}{NI} \cdot \frac{GM}{MH} \cdot \frac{PI}{PG} = 1$ și, conform reciprocei teoremei lui Menelaus, rezultă că punctele N ,

M și P sunt coliniare. ■

§5. ȘIR DE IMPLICAȚII

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR



TEOREMA CATETEI

$AB^2 = BC \cdot BD$, unde $D = pr_{BC} A$ și $\hat{A}$ drept

$AC^2 = BC \cdot CD$, unde $D = pr_{BC} A$ și $\hat{A}$ drept



TEOREMA LUI PITAGORA

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, unde $\hat{A}$ drept



TEOREMA LUI PITAGORA GENERALIZATĂ

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC$, unde $D = pr_{BC} A$ și $\hat{C}$ ascuțit

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot DC$, unde $D = pr_{BC} A$ și $\hat{C}$ obtuz



RELAȚIA LUI STEWART

$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC$,
unde A, B, C puncte coliniare, $B \in (AC)$ și $O \notin AC$



CALCULUL LUNGIMILOR MEDIANELOR ȘI BISECTOARELOR

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$i_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$$

§6. BIBLIOGRAFIE

- 1. G. ȚIȚEICA - *Probleme de geometrie*, Editura Apollo Craiova - 1992**
- 2. L. NICOLESCU, V. BOSKOFF – *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică București - 1990**
- 3. I. STERE, N. SOARE, L. NICULESCU, S. DRAGOMIR, M. ȚENA - *Probleme de geometrie și trigonometrie*, Editura Didactică și Pedagogică București – 1983**
- 4. M. ST. BOTEZ – *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică București – 1976**
- 5. A. COȚA, M. RĂDUȚIU, M. RADO, F. VORNICESCU – *Geometrie și trigonometrie*, Editura Didactică și Pedagogică București - 1988**